I segreti della Reazione

Cos'è la Reazione?

Reazionare un circuito (ma la cosa resta valida per un qualunque sistema fisico) vuol dire prelevare una parte della sua uscita e riportarla all'ingresso in modo da "modellare" la risposta del sistema a (quasi) completo piacimento del progettista.
I sistemi in reazione, qualunque sia la loro natura, si possono ricondurre tutti nella forma seguente:

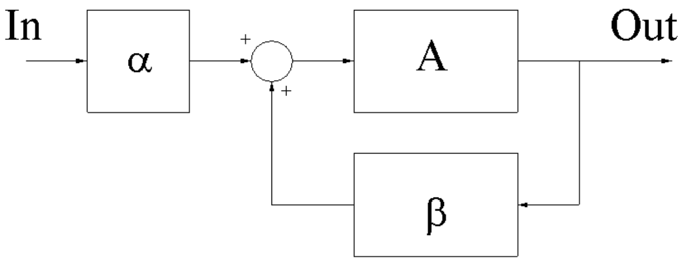

Figura 1

Possiamo quindi definire le seguenti funzioni di rete:

- α: Attenuazione di ingresso
- A: Funzione di trasferimento della catena diretta
- β: Funzione di trasferimento della rete di reazione

Note le funzioni di trasferimento di tutti i componenti della rete, possiamo scrivere la funzione di trasferimento complessiva dell'intero sistema come:

$$Out = A(\alpha In + \beta Out)$$
$$Out(1 - \beta A) = \alpha A In$$
$$\frac{Out}{In} = \frac{\alpha A}{1 - \beta A}$$

Si definisce infine l'**ERRORE** come

$$\varepsilon = \beta V_{OUT} - \alpha V_{IN}$$

è una grandezza molto importante perché l'anello, almeno intuitivamente, funziona cercando di minimizzare l'errore, se può farlo, altrimenti il sistema evolve in qualche modo fino a saturare.

Apparentemente sembra di aver soltanto complicato il circuito, in realtà possiamo "costringere" il sistema a fare esattamente (o quasi) quello che vogliamo noi. Esempi di sistemi reazionati ce ne sono a bizzeffe, alcuni molto importanti sono:

- Gli oscillatori (non parlo dei multivibratori astabili, ma degli oscillatori sinusoidali, RC, LC o anche quarzati): si basano su un amplificatore (perfettamente stabile ad anello aperto) e su una opportuna rete che permette l'innesco ed il mantenimento dell'oscillazione.
- Gli alimentatori stabilizzati: soltanto impiegando una rete di reazione si può abbattere l'impedenza di uscita in modo da mantenere bella stabile la tensione erogata
- I filtri attivi: con la reazione è facile realizzare risposte di tipo elimina banda molto strette.

Come si studia?

Solitamente si ricorre ad un approccio per certi versi "classico" tanto che viene proposto anche da Jacob Millman nei suoi testi. Consiste nell'ipotizzare che i vari blocchi che compongono il sistema siano perfettamente unidirezionali: il segnele, cioè, raggiunge l'uscita soltanto attraversando il blocco A (e per nessun motivo il blocco di reazione β). Allo stesso modo il segnale di reazione viene prodotto soltanto dalla rete di reazione β. Sotto queste ipotesi la funzione di trasferimento complessiva vale esattamente

$$\frac{Out}{In} = \frac{\alpha A}{1 - \beta A}$$

Il problema nasce quando anche solo un blocco non è unidirezionale: in tal caso l'approccio "classico" non è applicabile e occorre un metodo più generale.

Il Metodo di Scomposizione

Si tratta di un metodo non molto noto ([1]) ma facile da capire e da utilizzare che permette di ricavare le funzioni di rete α, A, β a partire da un qualunque circuito.
Questo approccio funziona sempre, qualunque sia la rete in quanto non è richiesta l'unidirezionalità dei blocchi. D'altra parte, qualora i blocchi siano unidirezionali, i risultati che produce concordano perfettamente con l'approccio "classico".
Consideriamo una rete qualunque e mettiamo in evidenza l'ingresso, l'uscita e due rami qualsiasi. Possiamo rappresentare come segue:

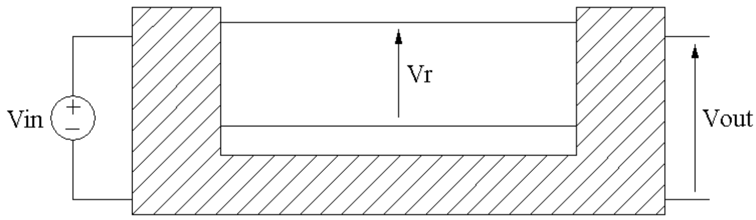

Figura 2

Dico subito che nella trattazione seguente mi riferirò sempre a delle tensioni, niente vieta di definire le funzioni di rete fra correnti, oppure fra una tensione ed una corrente. Con gli esempi sarà tutto più chiaro.
Ad ogni modo, una volta individuati i due rami a nostro piacimento, possiamo tagliarli e rappresentare come segue:

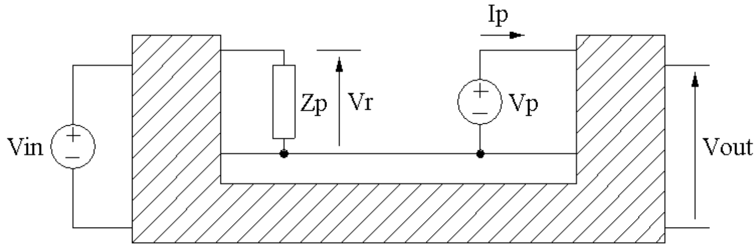

Figura 3

[1] E' stato proposto una ventina di anni fa dal Prof. Bruno Pellegrini dell'Università di Pisa con una dimostrazione elegante anche se troppo lunga per essere riportata su queste pagine. A chi ne fosse interessato, tuttavia, posso fornire l'articolo originale.

Affinché il taglio e la rappresentazione siano legittimi, però è necessario che la rete "trasformata" sia identica a quella di partenza. Per questo è necessario che le tensioni ai nodi e le correnti nei rami non subiscano alcuna variazione in conseguenza del taglio. Tutto ciò si ottiene semplicemente imponendo che

$$V_r = V_P$$
$$Z_P = \frac{V_P}{I_P}$$

Così le tensioni "a cavallo" del taglio si sono imposte identiche e anche la corrente nei rami interessati dal taglio non hanno subito variazioni.
Dove sta il vantaggio della trasformazione? Nell'aver aperto l'anello di reazione! Infatti se studiamo una rete reazionata semplicemente scrivendo le equazioni che la reggono, appena la rete si complica un po' ci perdiamo nei conti senza arrivare ad alcun risultato. Aprendo l'anello invece possiamo ricavare separatamente le varie funzioni di rete e i calcoli si semplificano enormemente. La conoscenza delle funzioni di rete, inoltre, permette lo studio degli effetti della reazione in modo abbastanza intuitivo e facilmente modellabile.
Detto questo, le funzioni di rete si definiscono come segue:

Valutare imponendo Vp=0	Valutare imponendo Vin=0
$\alpha = \left.\frac{V_r}{V_{IN}}\right\|_{V_P=0}$	$Z_P = \left.\frac{I_P}{V_P}\right\|_{V_{IN}=0}$
$\gamma = \left.\frac{V_{OUT}}{V_{IN}}\right\|_{V_P=0}$	$A = \left.\frac{V_{OUT}}{V_P}\right\|_{V_{IN}=0}$
$\rho = \left.\frac{I_P}{V_r}\right\|_{V_P=0}$	$\beta = \left.\frac{V_r}{V_{OUT}}\right\|_{V_{IN}=0}$

Una nota doverosa prima di proseguire: è vero che il taglio è del tutto arbitrario, però, affinché il metodo risulti vantaggioso occorre che la funzione $\rho = \left.\frac{I_P}{V_r}\right|_{V_P=0}$ sia nulla, altrimenti il metodo non comporta alcun vantaggio visto che l'anello in realtà non viene aperto. Una volta fatto il taglio, quindi, occorre verificare tale condizione, nel caso non sia verificata si cercherà un taglio alternativo.
Una volta calcolate le funzioni di rete, la funzione di trasferimento complessiva diventa

$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{\alpha A}{1-\beta A} + \gamma \cong \frac{\alpha A}{1-\beta A}$$

La differenza col risultato "classico" sta tutta nella funzione γ: essa assume valore non nullo se anche un solo blocco risulta non unidirezionale. Di solito (o, almeno, se il taglio è piuttosto "felice") γ è di valore trascurabile.
La quantità βA è detta **GUADAGNO D'ANELLO** ed il suo valore (spesso espresso in dB) prende il nome di **TASSO DI REAZIONE**.

Nel caso il guadagno d'anello sia negativo, la reazione che ne risulta è detta **NEGATIVA**, mentre è detta **POSITIVA** se il guadagno d'anello è positivo. La reazione negativa apporta numerosi benefici (quali l'allargamento della banda passante, la modifica delle impedenze di ingresso e uscita, l'immunizzazone da disturbi e/o variazione delle caratteristiche dei dispositivi attivi …). La reazione positiva conduce invece verso l'instabilità tanto che viene utilizzata negli oscillatori (non i multivibratori, ma gli oscillatori sinusoidali accordati con gruppi RC, LC o quarzati).
Infine è da notare un particolare: è vero che il taglio è arbitrario, ma (e lo vedremo in seguito) poiché le proprietà della rete dipendono essenzialmente dal guadagno d'anello, è evidente che, al variare del taglio, potranno cambiare le singole funzioni di rete α, A, β, Zp, ma sicuramente il prodotto βA resterà invariato.

Esempio n°1

Prima di proseguire si rende necessario un esempio. Proviamo a studiare uno stadio amplificatore del tipo (a destra ho sostituito il BJT con il modello per piccoli segnali).

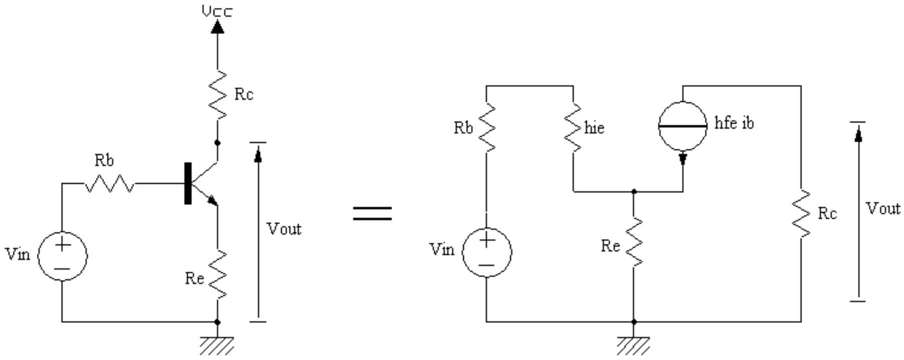

Figura 4

In genere un buon taglio si ha all'ingresso del dispositivo amplificatore, in questo modo si ottiene

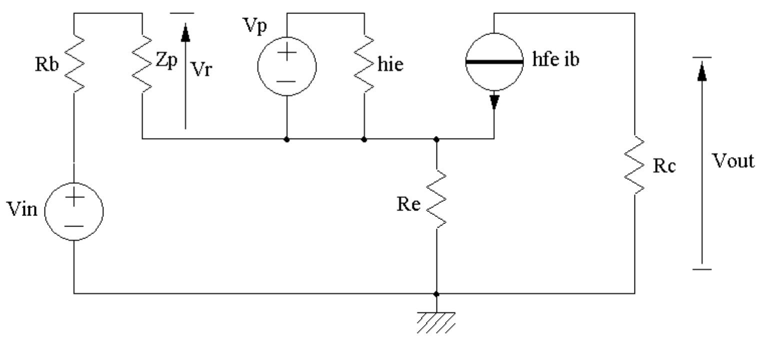

Figura 5

Le funzioni di rete sono quindi

$$Z_P = \left.\frac{I_P}{V_P}\right|_{V_{IN}=0} = h_{ie}$$

$$\alpha = \left.\frac{V_r}{V_{IN}}\right|_{V_P=0} = \frac{Z_P}{R_B + R_E + Z_P} = \frac{h_{ie}}{R_B + R_E + h_{ie}}$$

$$A = \left.\frac{V_{OUT}}{V_P}\right|_{V_{IN}=0} = -\frac{h_{fe}R_C}{h_{ie}}$$

$$V_r = -h_{fe}i_b R_e //(R_B + Z_P)\frac{Z_P}{R_B + Z_P} = -h_{fe}i_b \frac{h_{ie}R_E}{R_E + R_B + h_{ie}}$$

$$V_{OUT} = -h_{fe}i_b R_C$$

$$\beta = \left.\frac{V_r}{V_{OUT}}\right|_{V_P=0} = \frac{h_{ie}R_E}{(R_E + R_B + h_{ie})R_C}$$

$$\rho = 0$$

$$\gamma = 0$$

Quindi alla fine il guadagno dell'amplificatore è

$$\frac{\alpha A}{1-\beta A} = \frac{h_{ie}}{R_B + R_E + h_{ie}}\left(-\frac{h_{fe}R_C}{h_{ie}}\right)\frac{1}{1+\frac{h_{fe}R_C}{h_{ie}}\frac{h_{ie}R_E}{R_C(R_E + R_B + h_{ie})}}$$

Se la quantità $\frac{h_{fe}R_C}{h_{ie}}\frac{h_{ie}R_E}{R_C(R_E + R_B + h_{ie})}$ è molto maggiore dell'unità, si può approssimare tale risultato con

$$\frac{\alpha A}{1-\beta A} = -\frac{R_C}{R_E}$$

In questo esempio non ho preso in considerazione la presenza degli immancabili poli e zeri che modificherebbero il comportamente al variare della frequenza. E' ovvio che il metodo di scomposizione continua a funzionare anche se le varie funzioni di rete hanno delle singolarità.
Per dare una "rinfrescata" alla memoria, in coda a questa serie di articoli ci sarà un'appendice sul calcolo della risposta in frequenza.

L'immunità dalle variazioni delle caratteristiche

Dall'esempio appena visto si conclude che al BJT è richiesto soltanto di avere un guadagno di corrente (h_{fe}) elevato, non ci interessa sapere il valore preciso, è sufficiente che sia bello alto e l'applicazione della reazione permette di fissare il guadagno dello stadio con estrema precisione.
In generale, qualora il guadagno d'anello sia sufficientemente elevatod a poter trascurare l'unità, si può scrivere

$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{\alpha A}{1-\beta A} \cong \frac{\alpha A}{-\beta A} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

La funzione di trasferimento viene così determinata dalla sola attenuazione di ingresso e dalla rete di reazione, non più dalla catena di amplificazione A. Poiché la rete di reazione può essere fatta con componenti passivi di precisione elevata (così come il sommatore di ingresso), si conclude che è possibile costruire sistemi con una funzione di trasferimento ben definite e ripetibili nonostnte i dispositivi attivi spesso abbiano tolleranze superiori al 50%.

L'effetto sui disturbi e sulla distorsione

Consideriamo il solito anello e introduciamo, in un punto qualunque, un disturbo D:

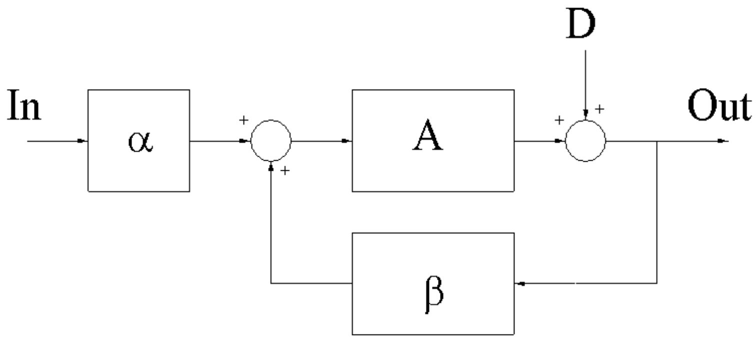

Figura 6

Poiché D è stato introdotto direttamente sull'uscita, rappresenta il vero disturbo che avremmo all'uscita se il sistema fosse ad anello aperto.
Calcoliamo ora cosa succede al disturbo D a causa della reazione. E' evidente che il contributo di uscita dovuto a D (ovviamente calcolato con ingresso IN nullo) è tale che

$$Out = D + \beta A Out$$
$$Out(1 - \beta A) = D$$
$$Out = \frac{D}{1 - \beta A}$$

Se ne conclude che il disturbo presente all'uscita viene abbattuto di una quantità pari, a parte la solita unità, al tasso di reazione.

Sulla base di questo risultato si spiega anche l'abbattimento della distorsione.
Infatti dire che un segnale è distorto, equivale a dire che è stato arricchito di armoniche generate in qualche modo dal sistema che lo ha trattato. Ma poiché tali armoniche non fanno parte dell'informazione originale, esse possono essere considerate alla stessa stregua di un disturbo.
OK, i disturbi e la distorsione vengono ridotti di un fattore βA, ma anche il segnale utile subisce la stessa riduzione (in conseguenza della diminuzione del guadagno rispetto al funzionamento ad anello aperto). Dove sta il vantaggio? Occhio! E' vero che si ha una riduzione dell'ampiezza di uscita, ma è altrettanto vero che essa può essere recuperata interamente aumentando l'ampiezza in ingresso, quindi possiamo considerare che l'uscita non subisca alcuna variazione di ampiezza.
La reazione quindi riesce ad abbattere anche la distorsione introdotta da un qualsiasi stadio amplificatore. E' per questo motivo che esistono amplificatori anche da centinaia di Watt che dichiarano distorsioni inferiori allo 0.01% alla massima potenza ([2]).

Esempio n°2

Detto così sembra tutto semplice, se non fosse che si tratta soltanto di freddi numeri, permettetemi quindi un esempio appropriato.
Consideriamo un amplificatore con una funzione di trasferimento quadratica:

[2] Che poi questo abbia effetti negativi sulla reale qualità percepita (visto che i migliori amplificatori Hi-Fi sono ad anello aperto o quasi) è un altro discorso. In questa sede mi limito ad esporre in modo obiettivo gli effetti della reazione.

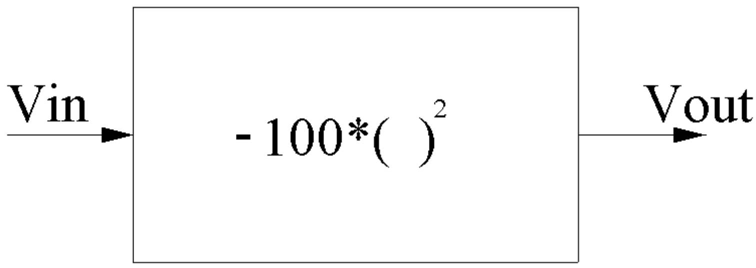

Figura 7

$V_{OUT} = -100 * V_{IN}^2$

Sarà ben difficile realizzarla in pratica, la propongo perché rende i calcoli piuttosto semplice senza far perdere di generalità.
Se lo usiamo ad anello aperto, il legame V_{IN} - V_{OUT} è

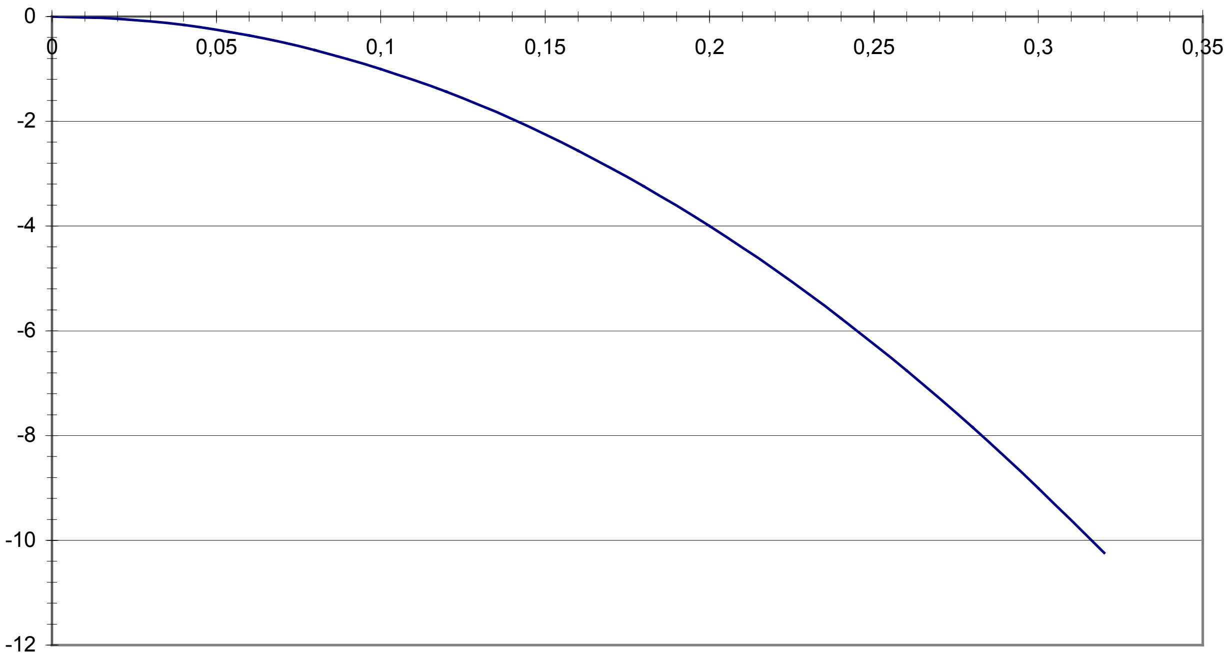

Figura 8

Si vede che il guadagno complessivo è piuttosto elevato, visto che con un ingresso di circa 325mV si ha un'uscita superiore ai 10V, però nessuno si sognerebbe mai di impiegarlo come amplificatore.
Poviamo ora a chiudere un anello:

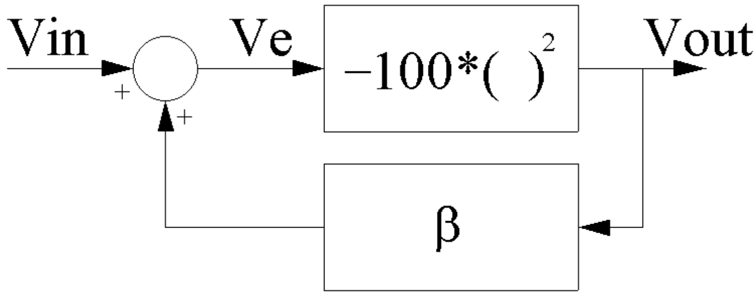

Figura 9

è facile osservare che vale la seguente relazione

$$V_{OUT} = -100 * (V_e)^2 = -100 * (V_{IN} + \beta V_{OUT})^2$$

Se svolgiamo il quadrato e ricaviamo la tensione di uscita (si tratta di risolvere un'equazione di secondo grado) si ottiene

$$V_{OUT} = \frac{-\left(2\beta V_{IN} + \frac{1}{100}\right) - \sqrt{\left(2\beta V_{IN} + \frac{1}{100}\right)^2 - 4\beta^2 V_{IN}^2}}{2\beta^2}$$

Per vostra comodità ho imposto $\beta = 0.25$ e con Excel ho disegnato l'andamento di questa funzione di trasferimento:

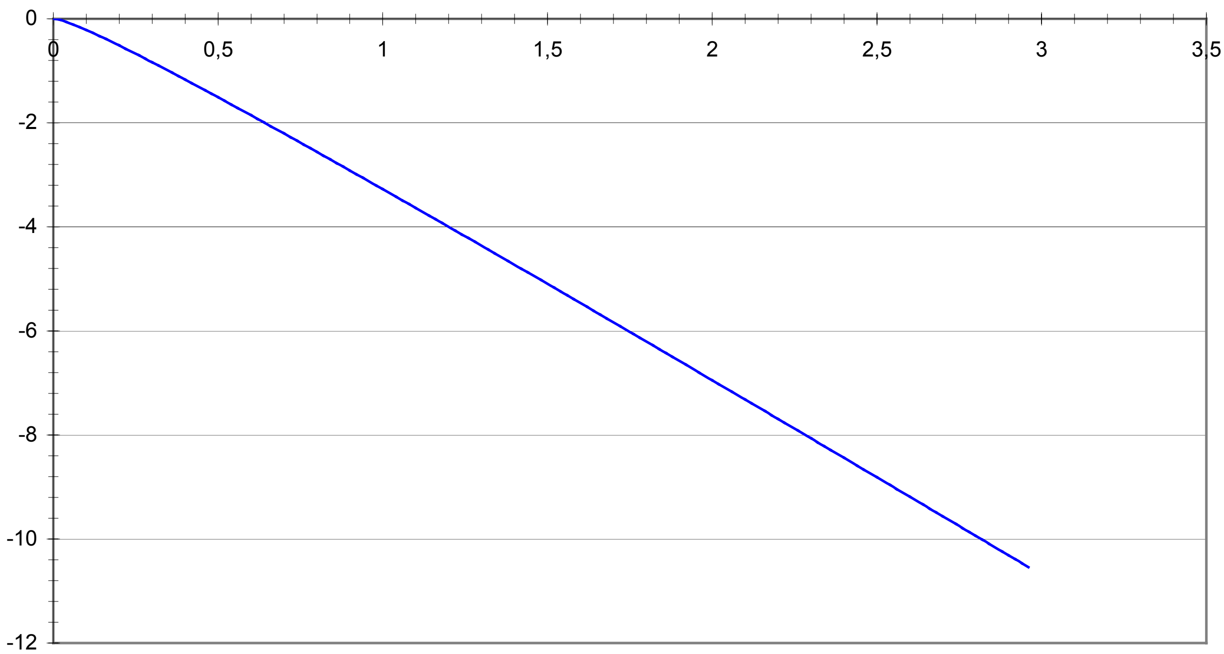

Figura 10

Si osserva che, a fronte di una diminuzione di guadagno piuttosto marcata (ora servono quasi 3V per un'uscita di 10V),il sistema è ora estremamente lineare.

Il grafico seguente mostra (con linea nera riferita all'asse di destra) la pendenza della funzione di trasferimento dell'amplificatore usato ad anello aperto e (con linea blu riferita all'asse di sinistra) la pendenza delle funzione di trasferimento del sistema reazionato. Si nota che l'effetto di linearizzazione è molto efficiente.

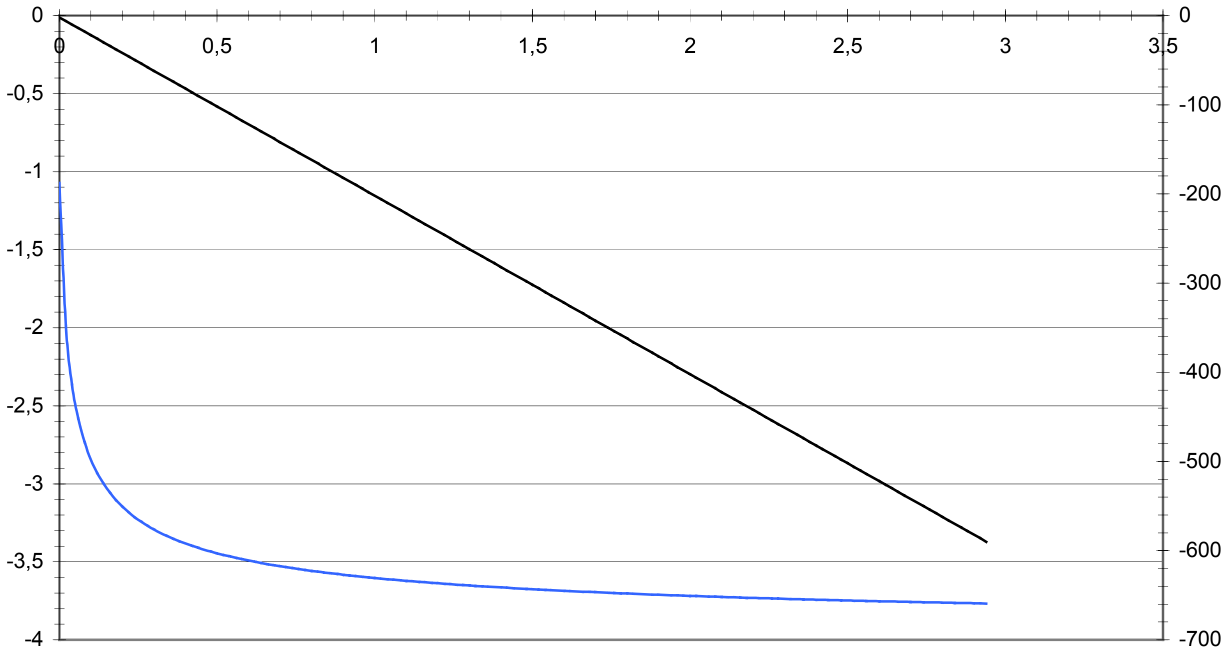

Figura 11

Rimane una certa curvatura soltanto in prossimità dell'origine. Per piccoli valori dell'ingresso, infatti, poiché l'amplificatore è fortemente non lineare, anche il guadagno d'anello avrà un valore numerico piuttosto limitato, quindi la correzione della reazione non potrà essere molto efficiente. L'andamento del guadagno d'anello è nel grafico seguente

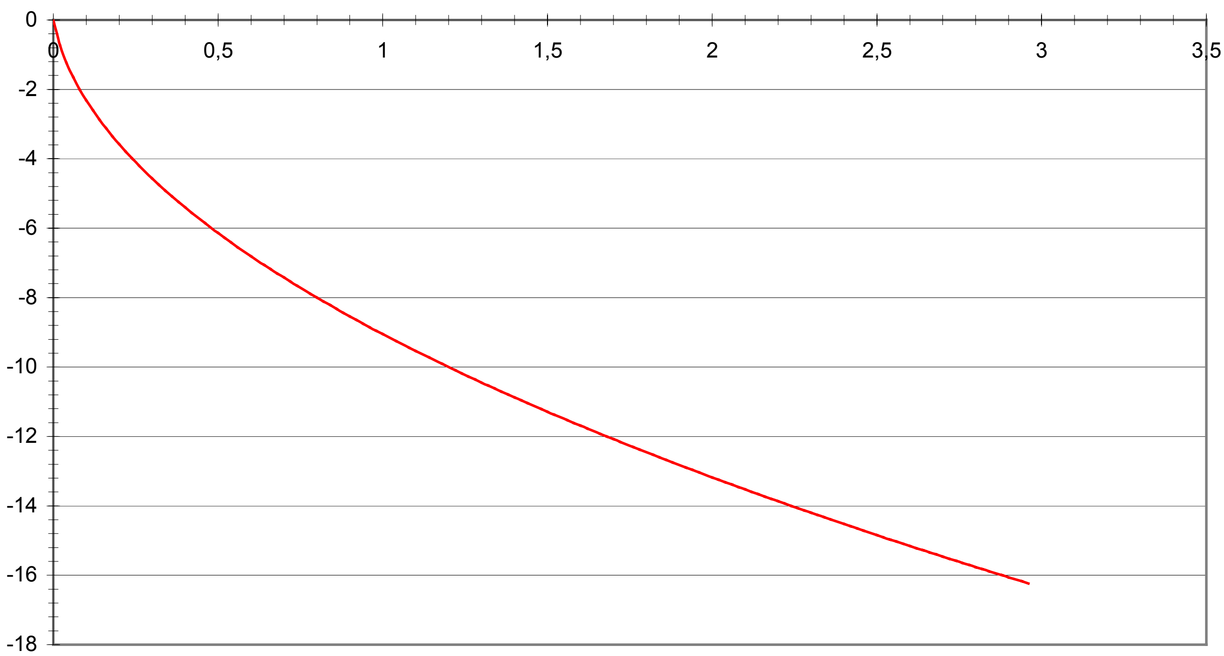

Figura 12

Sicuramente, e potete provarlo anche da soli se avete un minimo di esperienza con Excel e un po' di pazienza, al crescere sia del fattore di reazione β, sia di A (magari portandolo anche a $V_{OUT} = 500 * V_{IN}^2$) la linearità ne giova moltissimo.

Notiamo infine un particolare: la funzione di trasferimento tende al valore –4 (si vede dal grafico della pendenza), in conseguenza di $\alpha = 1$ e $\beta = 0.25$.

Effetti sulla banda passante

L'applicazione di un certo tasso di reazione ad un amplificatore, permette (ovviamente a scapito di una certa riduzione del guadagno) l'allargamento della banda passante.
Consideriamo una rete di reazione con risposta in frequenza costante (è abbastanza comune visto che spesso è costruita con un partitore resistivo) e un amplificatore che, ad anello aperto, presenta un certo guadagno A_{OL} ed un polo (ovviamente negativo, altrimenti sarebbe instabile) a pulsazione S_P : tale amplificatore avrà la seguente funzione di trasferimento (di tipo passa basso)

$$A = -\frac{A_{OL}}{1 + S/S_P}$$

Chiudendo un anello di reazione, il sistema acquista la seguente funzione di trasferimento complessiva

$$T(S) = \frac{\alpha A}{1 - \beta A} = -\alpha \frac{A_{OL}}{1 + S/S_P} \frac{1}{1 + \beta \frac{A_{OL}}{1 + S/S_P}} = -\frac{\alpha A_{OL}}{1 + S/S_P} \frac{1 + S/S_P}{\beta A_{OL} + 1 + S/S_P} = -\frac{\alpha A_{OL}}{1 + \beta A_{OL}} \frac{1}{1 + S/\beta A_{OL} S_P}$$

In definitiva il guadagno viene ridotto di un fattore βA_{OL} , e, allo stesso tempo, la banda passante (in conseguenza dello spostamento del polo) viene allargata della stessa quantità. Un fenomeno simile si presenta anche alle basse frequenze, consideriamo allora che l'amplificatore che vogliamo reazionare abbia una funzione di trasferimento di tipo passa alto:

$$A = -A_{OL} \frac{S}{1 + S/S_P}$$

Chiudendo l'anello di reazione la funzione di trasferimento diventa

$$T(S) = \frac{\alpha A}{1 - \beta A} = -\alpha A_{OL} \frac{S}{1 + S/S_P} \frac{1}{1 + \beta A_{OL} \frac{S}{1 + S/S_P}} = -\frac{\alpha A_{OL} S}{1 + S/S_P + S\beta A_{OL}} = -\frac{\alpha A_{OL} S}{1 + S/\left(\frac{S_P}{1 + S_P \beta A_{OL}}\right)}$$

Nel caso che il tasso di reazione sia sufficientemente alto il nuovo limite inferiore di banda diventa

$$f_{MIN} \cong \frac{1}{\beta A_{OL}}$$

Occhio! I due calcoli appena fatti presuppongono che il sistema da reazionare abbia un solo polo. In realtà questa condizione non è molto restrittiva., infatti è sufficiente che il sistema sia caratterizzato da un polo dominante, in tal modo può essere trattato come un sistema a singolo polo (almeno in prima approssimazione, poi se si vogliono risultati più precisi ci si arma di tanta pazienza e si svolgono calcoli più complessi) e si applicano gli stessi risultati appena ottenuti.

Gli oscillatori

Com'è possibile che un sistema produca spontaneamente un'oscillazione di ampiezza costante? L'idea è semplice: si usa una rete reazionata e si impone che il guadagno d'anello sia unitario (intendo modulo 1 e fase 0). Perché? Un qualunque segnale che per qualche motivo viene iniettato all'interno della rete (sia esso applicato tramite un apposito ingresso oppure un disturbo indotto dall'esterno) si trova a percorre l'anello di reazione. Se il guadagno d'anello è unitario, il segnale, una volta percorso tutto l'anello, si ritrova inalterato, di conseguenza un'eventuale oscillazione che venga innescata in qualche modo si autosostiene fino a che non si spenge l'intero sistema.

Dal punto di vista strettamente matematico, si osserva che se $\beta A = 1$ la funzione $T(S) = \frac{\alpha A}{1 - \beta A}$ tende all'infinito (in conseguenza dell'annullamento del denominatore), e tale risultato deve essere interpretato pensando che in uscita dal sistema è presente un segnale non nullo anche se l'ingresso è mantenuto rigorosamente a zero.

La condizione $\beta A = 1$ prende anche il nome di **CONDIZIONE DI BARKAUSEN A REGIME** e deve essere verificata se vogliamo che l'oscillazione si mantenga di ampiezza stabile. OK, ma perché l'oscillazione si mantenga, ci vuole qualcosa che la inneschi? SI e NO. E' evidente che una causa che scateni l'evoluzione del sistema è necessaria, ma tale causa può essere di qualunque tipo, va bene anche lo stesso transitorio che inevitabilmente si crea al momento dell'accensione, oppure anche il rumore termico sempre associato a qualunque dispositivo (attivo o passivo non fa grande differenza).
D'altra parte al momento dell'innesco, nessuno può dirci con che ampiezza inizia la produzione dell'oscillazione, pertanto sarà necessario imporre una condizione del tipo $\beta A > 1$ in modo che l'ampiezza, se anche inizialmente risultasse molto piccola, verrà esaltata in breve tempo. Tale condizione prende anche il nome di **CONDIZIONE DI BARKAUSEN ALL'INNESCO**. In generale gli oscillatori avranno sempre dei sistemi di controllo del guadagno in modo che l'oscillazione prodotta sia di ampiezza costante e la distorsione sia minima. All'atto pratico, si potrebbe anche dimensionare il sistema in modo da avere un guadagno d'anello in modulo superiore a 1, e omettere qualsiasi sistema di regolazione dell'ampiezza. In questo modo una volta innescata, l'oscillazione aumenta sempre di più la sua ampiezza fino a quando non intervengono delle cause di non linearità che limitano ogni ulteriore aumento; fatto così funziona, però viene introdotta parecchia distorsione.

Tutti sappiamo che gli oscillatori sinusoidali lavorano ad una ben precisa frequenza, questo è possibile perché hanno un guadagno d'anello che, con opportune singolarità, raggiunge la condizione di Barkausen soltanto in corrispondenza della frequenza desiderata.
Per costruire un oscillatore si possono utilizzare con successo sia amplificatori non invertenti (come nel caso del classico ponte di Wien) o anche amplificatori invertenti (come gli oscillatori a reti di sfasamento o anche i classici Hartley o Colpitss). Occorre soltanto ricordare che se l'amplificatore è invertente, introduce già una fase di –180°, quindi per ottenere la condizione di Barkausen occorre che la rete di reazione introduca altri 180°, questo si traduce in un guadagno d'anello con almeno tre poli. Invece per amplificatori non invertenti serve un guadagno d'anello con uno zero nullo e due poli.

Esempio n°3

Vediamo come si dimensiona un oscillatore a PONTE di WIEN. Lo schema elettrico è

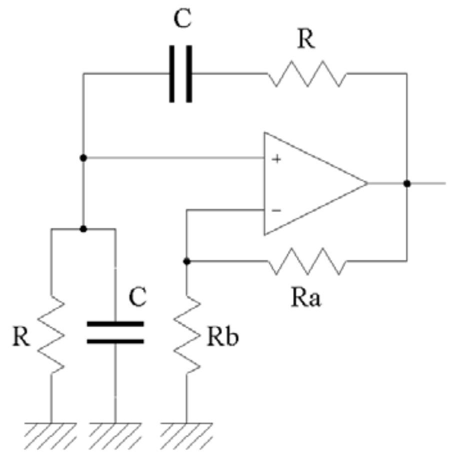

Figura 13

Come al solito, per uno studio agevolato, conviene tagliare l'anello, anche qui il punto migliore è all'ingresso dell'amplificatore (che è situato sull'ingresso non invertente dell'operazionale). Pertanto si ottiene:

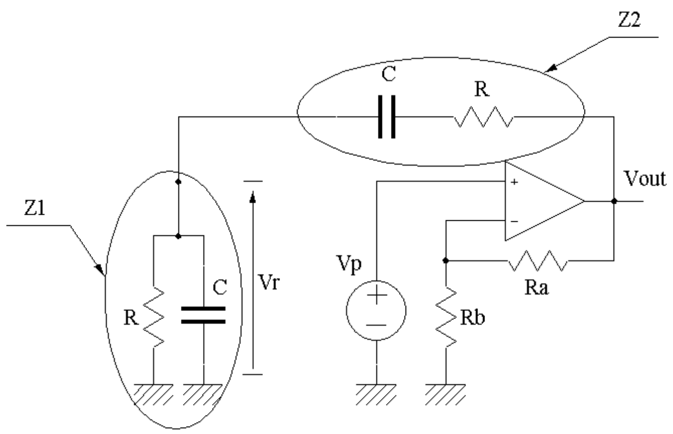

Figura 14

Non ho volutamente disegnato la Zp in quanto coincide con l'impedenza di ingresso dell'operazionale, che, essendo di valore molto elevato, ha un contributo trascurabile nel parallelo con la resistenza e la capacità.
Per calcolare il guadagno d'anello occorre usare un trucchetto, visto che non la rete non ha un ingresso, necessario per calcolare le funzioni di rete così come si sono definite col metodo di scomposizione.
Scriviamo quindi

$$\beta A = \frac{V_r}{V_{OUT}} \frac{V_{OUT}}{V_P} = \frac{V_r}{V_P}$$

Per comodità definisco

$$K = \left(1 + \frac{R_a}{R_b}\right)$$

$$Z_1 = \frac{R}{1 + SCR}$$

$$Z_2 = \frac{1 + SCR}{SC}$$

Quindi il guadagno d'anello vale

$$\beta A = K\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = K\frac{R}{1+SCR}\frac{1}{\frac{R}{1+SCR} + \frac{1+SCR}{SC}} = K\frac{SCR}{SCR + (1+SCR)^2} = K\frac{SCR}{S^2C^2R^2 + 3SCR + 1}$$

Per il dimensionamento si prosegue sostituendo $S = j\omega$:

$$\beta A = K\frac{j\omega CR}{(j\omega)^2 C^2R^2 + 3j\omega CR + 1} = K\frac{j\omega CR}{-\omega^2C^2R^2 + 3j\omega CR + 1}$$

Affinché il guadagno d'anello sia reale (quindi abbia fase zero) deve essere

$$1 - \omega^2C^2R^2 = 0$$

Quindi la frequenza di lavoro è

$$\omega = \frac{1}{RC} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi RC}$$

Alla frequenza di lavoro si ha

$$\beta A = K\frac{j\omega CR}{3j\omega CR} = \frac{K}{3}$$

Ne consegue che, per la condizione di Barkausen, K=3 e Ra=2Rb.

Esempio n°4

Proviamo a aggiungere il controllo di guadagno:

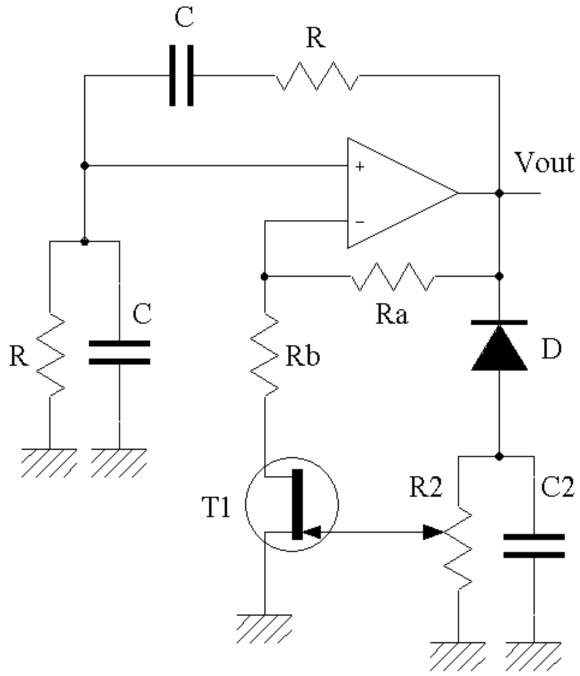

Figura 15

Il funzionamento è semplice. Intanto Ra e Rb vengono dimensionate per un guadagno dell'operazionale attorno a 3.5 – 4. Il fet T1 viene usato come resistore controllato in tensione, quanto più il gate è negativo, tanto più alta è la sua resistenza equivalente. All'innseco, poiché C2 è scarico, il gate di T1 si trova a potenziale di massa, quindi la resistenza del fet è minima e il guadagno d'anello è superiore all'unità. L'oscillazione così si innesca e si esalta.
Il diodo D raddrizza le semionde negative, quindi, al crescere dell'oscillazione, sul C2 (e quindi sul gate di T1) è presente una tensione negativa che fa aumentare la resistenza equivalente del fet riducendo il guadagno d'anello. Il risultato è che l'ampiezza dell'oscillazione viene mantenuta costante ad un valore regolabile col trimmer R2.
Potete provare a realizzare questo circuito usando un comunissimo uA741 o anche un TL081. Dimensionatelo per una frequenza di qualche kHz. Il fet può essere un BF245, C2 è da 1μF, mentre R2 deve essere tale che

$$R_2C_2 \geq 10T$$

dove T è il periodo dell'oscillazione. Per Ra e Rb fate in modo che il loro valore complessivo sia attorno ai 47kΩ, il fet funziona da resistenza, infatti, solo se la corrente di drain è sufficientemente piccola. Nel caso la sinusoide prodotta sia molto distorta, aumentate il valore di Ra e Rb in modo da diminuire la corrente nel FET e portarlo in zona di funzionamento lineare.

Il problema della stabilità

Abbiamo visto che realizzare un oscillatore è molto semplice, poiché con la reazione si riesce a rendere instabile un sistema che, di suo, sarebbe perfettamente stabile. In generale però può anche succedere che si voglia reazionare un sistema al solo scopo di modificarne, per esempio, il guadagno o l'impedenza di uscita (tipico caso degli alimentatori), e, a montaggio avvenuto, ci accorgiamo che il sistema ottenuto è instabile oppure che, in particolari condizioni di funzionamento, può diventare instabile.

Il motivo è molto semplice: il guadagno d'anello soddisfa per qualche motivo che non abbiamo previsto le condizioni di Barkausen.
Vengono perciò introdotti i **MARGINI DI STABILITA'** allo scopo di dare una indicazione sul rischio effettivo che il sistema divenga instabile. Generalmente li si definiscono utilizzando i diagrammi di Bode. Vengono definiti due margini di stabilità: il **MARGINE DI GUADAGNO** ed il **MARGINE DI FASE**.
Consideriamo un guadagno d'anello (negativo, visto che solitamente lavoreremo con sistemi in reazione negativa) con tre poli: i suoi diagrammi di Bode avranno sempre il seguente aspetto:

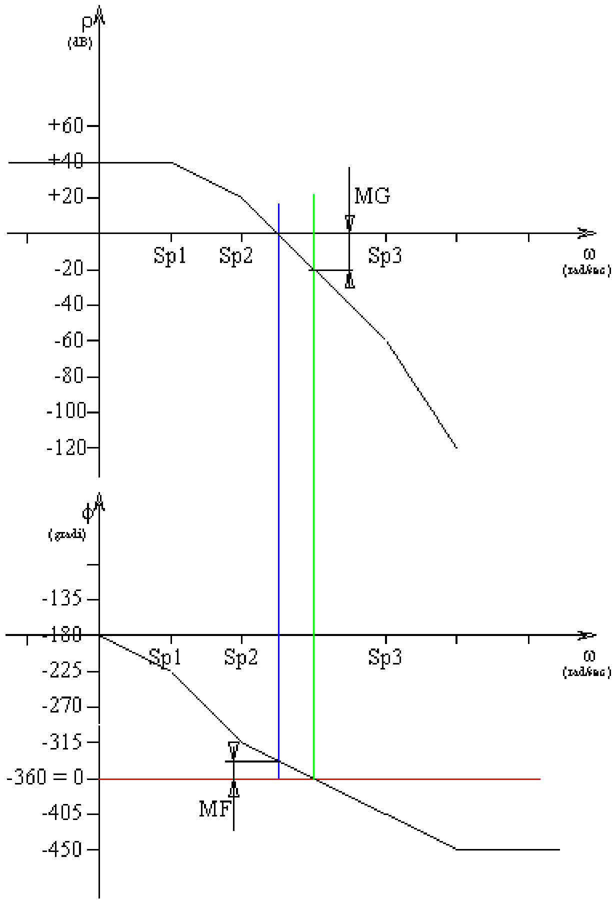

Figura 16

Sia ω_1 la pulsazione alla quale la fase raggiunge gli 0° (o –360° che tanto è lo stesso). Il Margine di guadagno **MG** è definito come il valore in dB del modulo (valutato a ω_1), cambiato di segno. Nell'esempio di figura **MG** è approssimativamente di una ventina di dB. Che vuol dire? Semplice, che è possibile incrementare il tasso di reazione soltanto fino a 20dB, e se l'incremento è superiore a questo valore il sistema diventa sicuramente instabile.
Sia ω_2 la pulsazione alla quale il modulo passa per gli 0 dB. Il Margine di fase **MF** è definito come il valore che occorre aggiungere alla fase (valutata alla ω_2) per portarla a 0°. Nell'esempio di figura siamo attorno alla ventina di gradi.
Per garantire la stabilità in ogni situazione, in genere si ritiene necessario avere un margine di fase di 45° e un margine di guadagno di una ventina di dB.

Tecniche di compensazione

Siamo ormai alla fine della trattazione, resta da vedere un piccolo cavillo. Abbiamo disegnato il nostro sistema, l'abbiamo dimensionato ed infine abbiamo valutato i margini di stabilità e ci siamo

accorti che il margine di fase e/o di guadagno sono negativi. Il sistema quindi è sicuramente instabile. Che si fa? Si butta via tutto? NO! Si può recuperare la stabilità introducendo quelle che si chiamano **COMPENSAZIONI**.
In letteratura si trovano molte tecniche di compensazione (e una trattazione completa sarebbe troppo pesante), personalmente, però, uso un metodo piuttosto empirico ma che fornisce ottimi risultati. Attenzione, il mio metodo funziona bene per frequenze non troppo alte, scordatevi di utilizzarlo a 10MHz. Diciamo che è ottimo (o, almeno, è un'ottima base di partenza) per sistemi come alimentatori, convertitori, stabilizzatori, amplificatori audio.
L'idea è semplice: si prende il guadagno d'anello da compensare e, mediante l'introduzione di qualche zero si fa in modo da innalzare i margini di stabilità. Al limite si potrebbe anche rendere il sistema a singolo polo in modo da impedire l'insorgere di instabilità in ogni condizione di utilizzo).

Uno zero si introduce col seguente circuito:

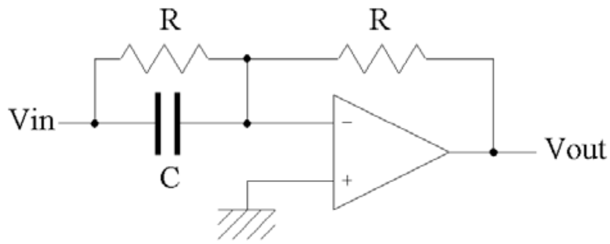

Figura 17

la sua funzione di trasferimento infatti è $\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = -(1 + SCR)$ e l'unica cosa a cui prestare attenzione è l'inversione di segno (da recuperare, eventualmente, con un altro amplificatore invertente).
Un compensatore di questo tipo funziona, ma, e qui sta la vera limitazione, non introduce soltanto uno zero, (fisicamente non sarebbe possibile) ma anche un polo a frequenza piuttosto alta. E' questo il motivo per cui questo compensatore **non** può essere usato alle alte frequenze (dove gli zeri si possono introdurre con particolari trucchi).

Tipi di reazione
Un anello di reazione, lo abbiamo visto, "misura" la grandezza di uscita e, dopo opportune elaborazione, agisce nella maglia di ingresso in qualche modo.
A seconda che, sul lato dell'uscita, venga misurata una tensione o una corrente, si parla di reazione di **TENSIONE** o di **CORRENTE**.
Nella maglia di ingresso, allo stesso modo, è possibile riportare una tensione o una corrente e quindi si parla (rispettivamente) di reazione di tipo **SERIE** o **PARALLELO.**
Per esempio, la resistenza di emettitore su un transistore, origina una reazione di **CORRENTE – SERIE** mentre un operazionale configurato come amplificatore invertente è caratterizzato da una reazione di **TENSIONE – PARALLELO**.

Esempio n°5

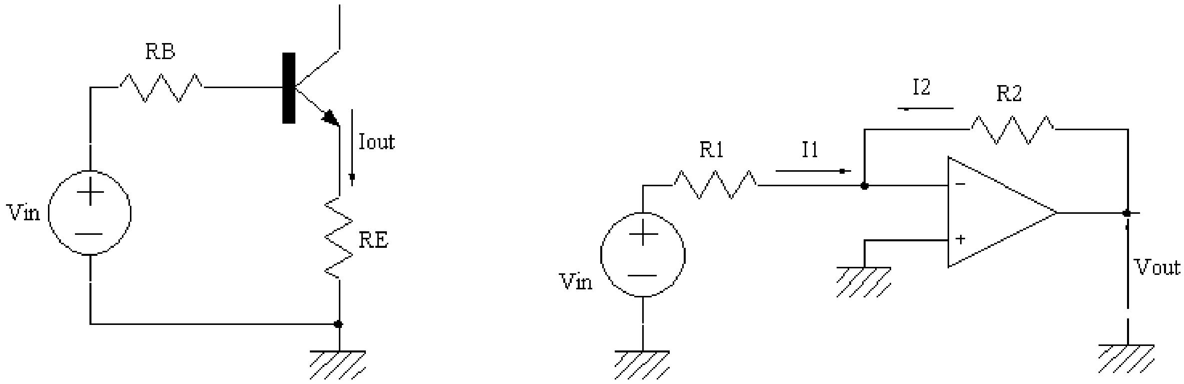

Figura 18

Infatti la caduta sulla RE dipende dalla corrente della maglia di uscita (per questo si parla di reazione di CORRENTE), ma tale caduta, che costituisce il segnale di reazione, è inserita nella maglia di ingresso in serie al segnale di ingresso Vin (e si parla quindi di reazione SERIE).
Con l'operazionale, si osserva che il segnale di reazione è la corrente I2 che viene sommata, sul nodo di ingresso, assieme al segnale di ingresso I1, pertanto è una reazione PARALLELO. La I2, a sua volta, è dovuta esclusivamente alla tensione di uscita Vout, quindi si parla di reazione di TENSIONE..

Queste definizioni non sono fini a loro stesse ma risultano di notevole importanza, poiché, a seconda del tipo di reazione impiegato, si hanno effetti radicalmente diversi sulle impedenze di ingresso e di uscita.

Effetti sull'impedenza di ingresso

Si sente spesso dire che la reazione modifica le impedenze di ingresso e di uscita di un amplificatore, ma in che modo avviene? Come si calcola?
Il tutto è molto semplice. Iniziamo dal calcolo della impedenza di ingresso per una reazione SERIE.
Siccome la scelta del taglio è arbitraria, nessuno vieta di schematizzare la rete in modo che il generatore di ingresso Vin si trovi direttamente in serie alla Zp in modo da rappresentare come in figura:

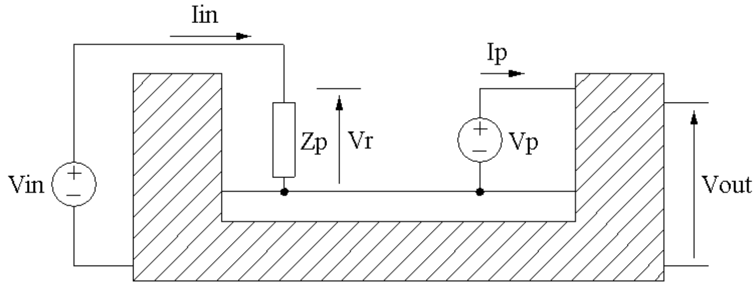

Figura 19

Facciamo due calcoli: per quanto visto con il metodo di scomposizione, si può scrivere che

$$V_R = \alpha V_{IN} + \beta V_{OUT} = \alpha V_{IN} + \beta A V_P$$
$$V_R = V_P$$
$$V_R(1-\beta A) = \alpha V_{IN}$$
$$V_R = \frac{\alpha V_{IN}}{1-\beta A}$$

Per la legge di Ohm, l'impedenza di ingresso può essere valutata come

$$Z_{IN} = \frac{V_{IN}}{I_{IN}}$$

Ma per la schematizzazione fatta

$$I_{IN} = \frac{V_R}{Z_P}$$

Sostituendo V_R si ottiene

$$Z_{IN} = \frac{V_{IN}}{\frac{\alpha V_{IN}}{1-\beta A}\frac{1}{Z_P}} = Z_P \frac{1-\beta A}{\alpha}$$

Poiché la Zp è l'impedenza di ingresso dello stadio amplificatore A, se ne conclude che la reazione SERIE opera un innalzamento dell'impedenza di ingresso del solito fattore $(1-\beta A)$.
In modo del tutto analogo si procede per la reazione PARALLELO, e poichè le grandezze in gioco sono essenzialmente delle correnti, e poiché le correnti si sommano sui nodi, conviene usare la rappresentazione seguente:

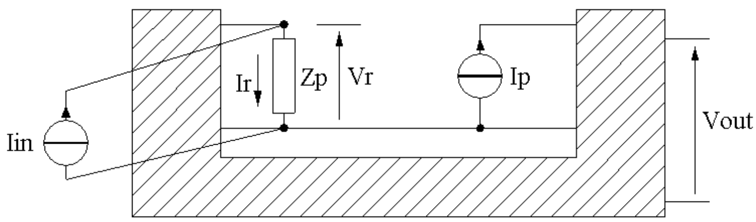

Figura 20

Di fatto ho portato il generatore di ingresso (che stavolta eroga una corrente anziché una tensione) direttamente in parallelo alla Zp. Ricordo che l'operazione è lecita perché non c'è alcun vincolo sulla posizione e il tipo di taglio è tutto arbitrario. Al posto di Vp ho messo il generatore di corrente Ip perché le grandezze che interessano il taglio ora sono correnti. Le funzioni di rete continuano ad essere tutte definite come le abbiamo usate fin'ora, a patto, ovviamente, di sostituire le tensioni con le correnti: per esempio A diventa

$$A = \frac{V_{OUT}}{I_P}$$

Allo stesso modo la grandezza di uscita avrebbe potuto essere una corrente, in tal caso

$$A = \frac{I_{OUT}}{I_P}$$

Fatta questa precisazione, si possono ripetere quasi gli stessi calcoli fatti per la reazione di tipo SERIE:

$$I_R = \alpha I_{IN} + \beta V_{OUT} = \alpha I_{IN} + \beta A I_P$$
$$I_R = I_P$$
$$I_R(1-\beta A) = \alpha I_{IN}$$
$$I_R = \frac{\alpha I_{IN}}{1-\beta A}$$
$$V_{IN} = Z_P I_R$$
$$Z_{IN} = \frac{V_{IN}}{I_{IN}} = \frac{\alpha I_{IN} Z_P}{(1-\beta A) I_{IN}} = \frac{\alpha Z_P}{1-\beta A}$$

Si osserva quindi una riduzione dell'impedenza di ingresso rispetto al funzionamento ad anello aperto.

I risultati appena ottenuti sono utilizzabili anche in pratica: qualora si voglia calcolare l'impedenza di ingresso di una rete reazionata è sufficiente fare uno dei due tagli appena proposti (ovvero portare il generatore di ingresso in serie o in parallelo alla Zp) e poi studiare la rete calcolando le varie funzioni d'anello. A questo punto applicando i due risultati appena visti l'impedenza di ingresso è pronta.

Effetto sull'impedenza di uscita

Per calcolare l'impedenza di uscita conviene procedere in modo molto standard: si applica sull'uscita un generatore di tensione Vprova, in qualche modo si calcola la corrente erogata Iprova e poi si definisce l'impedenza di uscita come il rapporto fra Vprova e Iprova. Durante questo procedimento si mantiene l'ingresso nullo.
Consideriamo quindi una reazione di tensione, e rappresentiamo la rete come segue.

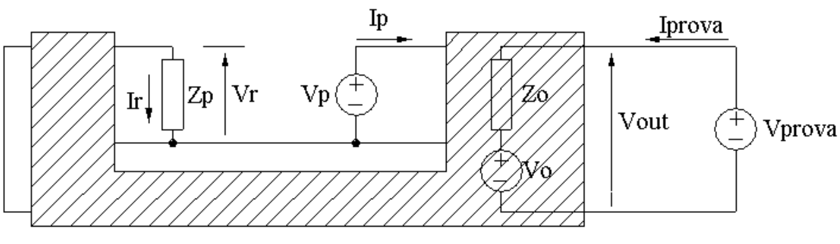

Figura 21

In figura Zo è l'impedenza di uscita dell'amplificatore A, mentre Vo rappresenta la tensione erogata a vuoto. L'ingresso è stato cortocircuittato.
Si può quindi scrivere che

$$I_{PROVA} = \frac{V_{PROVA} - V_O}{Z_O}$$
$$V_O = AV_P = AV_R = \beta AV_{OUT} = \beta AV_{PROVA}$$

Quindi la corrente si può scrivere come

$$I_{PROVA} = V_{PROVA} \frac{(1 - \beta A)}{Z_O}$$

E infine l'impedenza di uscita vale

$$Z_{OUT} = \frac{Z_O}{1 - \beta A}$$

Si conclude che la reazione di TENSIONE riesce a diminuire l'impedenza di uscita di un amplificatore, tant'è che gli alimentatori stabilizzati sono tutti basati su un anello di reazione che controlla la tensione di uscita al fine di contenere il più possibile le variazioni causate da fluttuazioni della corrente erogata.

Allo stesso modo si può dimostrare che la reazione di CORRENTE innalza l'impedenza di uscita: facendo praticamente gli stessi calcoli già visti si ottiene che

$$Z_{OUT} = Z_O(1 - \beta A)$$