APPENDICE: La risposta in frequenza

L'elettrotecnica ci insegna che la reattanza equivalente di condensatori e induttori varia (con la frequenza) secondo le leggi seguenti:

$$X_C = \frac{1}{j2\pi fC}$$
$$X_L = j2\pi fL$$

Di conseguenza qualunque rete che includa condensatori e/o induttori avrà una risposta fortemente dipendente dalla frequenza. Tale risposta in frequenza può essere ricavata facilmente, basta infatti, per comodità, sostituire la quantità $j2\pi f$ con la variabile **S** in modo da ottenere le seguenti relazioni:

$$X_C = \frac{1}{SC}$$
$$X_L = SL$$

A questo punto si prende la rete elettrica che si vuole studiare, si sostituiscono tutti i condensatori e gli induttori con le relative reattanze equivalenti e si scrivono poi le equazioni con i soliti metodi di Kirchoff.

La funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento (che nel seguito indicherò con $T(S)$ o anche con **FDT**) è definita come il rapporto fra l'ampiezza della grandezza di uscita e l'ampiezza della grandezza di ingresso, pertanto tutte le $T(S)$ che possiamo scrivere per le reti lineari sono sotto forma di frazione del tipo:

$$T(S) = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{N(S)}{D(S)}$$

Il fatto interessante, che permette uno studio molto semplice, è che il numeratore $N(S)$ ed il denominatore $D(S)$ sono dei polinomi a coefficienti costanti nella variabile S.
La funzione di trasferimento di un circuito rappresenta in forma molto compatta tutte le sue proprietà elettriche.
A causa di un legame con la risposta temporale, il numeratore della $T(S)$ di un sistema fisicamente realizzabile ([3]) deve avere grado minore o al massimo uguale al denominatore (in caso contrario la funzione di trasferimento deve ritenersi errata o associata ad un sistema fisicamente irrealizzabile).
OK, ma cos'è realmente la $T(S)$? Intuitivamente può essere interpretata come una sorta di "trasformazione" che viene applicata sul segnale di ingresso in modo da costruire l'uscita. Infatti possiamo scrivere che

$$V_{OUT} = V_{IN} * T(S)$$

[3] Nel senso che si può effettivamente costruire e far funzionare con successo.

In genere $T(S)$ è una quantità complessa, quindi ha un suo modulo ed una fase, ciò vuol dire che un'oscillazione ad una certa frequenza applicata all'ingresso della rete, subisce una modifica della sua ampiezza (secondo il modulo di FDT) e uno sfasamento pari proprio alla fase di FDT.
Morale, in $T(S)$ ci sono tutte le informazioni possibili sulla risposta in frequenza, occorre solo trovare un metodo semplice per estrarle.

Esempio A-1

Vediamo subito un esempio di come si scrive una funzione di trasferimento, consideriamo la rete di figura:

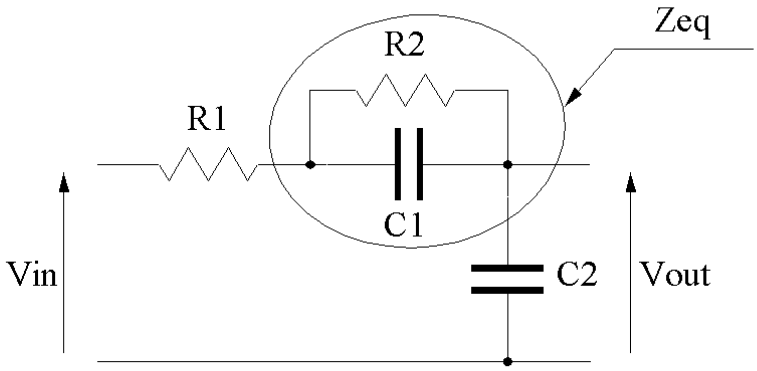


Figura A-1

Sia I la corrente che percorre la maglia, si hanno le seguenti relazioni:

$$Z_{eq} = \frac{R_2 \dfrac{1}{SC_1}}{R_2 + \dfrac{1}{SC_1}} = \frac{R_2}{1 + SC_1 R_2}$$

$$V_{OUT} = I \frac{1}{SC_2}$$

$$I = \frac{V_{IN}}{R_1 + Z_{eq} + \dfrac{1}{SC_2}} = \frac{V_{IN}}{R_1 + \dfrac{R_2}{1 + SC_1 R_2} + \dfrac{1}{SC_2}}$$

Pertanto la tensione di uscita è

$$V_{OUT} = \frac{V_{IN}}{R_1 + \dfrac{R_2}{1 + SC_1 R_2} + \dfrac{1}{SC_2}} \frac{1}{SC_2} = V_{IN} \frac{SC_2 (1 + SC_1 R_2)}{R_1 (1 + SC_1 R_2) SC_2 + SC_2 R_2 + (1 + SC_1 R_2)} \frac{1}{SC_2}$$

Svolgendo i calcoli fra parentesi e raggruppando i termini dello stesso grado si ottiene infine la funzione di trasferimento:

$$V_{OUT} = V_{IN} \frac{1 + SC_1R_2}{S^2C_1C_2R_1R_2 + S(C_2R_1 + C_2R_2 + C_1R_2) + 1}$$

$$T(S) = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{1 + SC_1R_2}{S^2C_1C_2R_1R_2 + S(C_2R_1 + C_2R_2 + C_1R_2) + 1}$$

Poiché mi servirà nel seguito della trattazione, supponiamo che i vari componenti abbiano i seguenti valori:

- C1 = 100nF
- C2 = 100nF
- R1 = 4.7kΩ
- R2 = 1kΩ

Sostituendo tali valori la funzione di trasferimento diventa

$$T(S) = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{1 + 100 * 10^{-6} S}{47 * 10^{-9} S^2 + 670 * 10^{-6} S + 1}$$

Poli e Zeri

Abbiamo visto che numeratore e denominatore di $T(S)$ sono dei polinomi di un certo grado. Come ci hanno insegnato a scuola, tutti i polinomi possono essere scomposti in fattori, per questo occorre uguagliare a zero il polinomio e risolvere l'equazione che così si crea.
Si definiscono **ZERI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO** i valori di **S** che ne annullano il numeratore.
Si definiscono **POLI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO** i valori di **S** che ne annullano il denominatore. Il numero di poli è uguale a quello degli elementi reattivi (che siano induttori o condensatori non importa) presenti nella rete.
Poli e Zeri sono anche detti **SINGOLARITA' DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO** e, siccome $S = j2\pi f$ è una pulsazione, la loro unità di misura è il **rad/sec** (radianti al secondo).
In genere le singolarità possono essere reali, complesse, puramente immaginarie o anche nulle. Nelle reti passive possiamo trovare soltanto poli reali negativi (eventualmente complessi, ma sempre a parte reale negativa, nel caso siano presenti induttori e condensatori assieme). Poli positivi caratterizzano soltanto le reti instabili, cioè che producono un'oscillazione permanente (gli oscillatori sono un valido esempio).

Esempio A-2

Calcoliamo le singolarità della funzione trovata all'esempio n°1, consideriamo quindi la [5].
Il numeratore è di grado unitario, annullandolo si ottiene quindi l'unico zero della $T(S)$:

$$1 + 100 * 10^{-6} S = 0$$

$$S_Z = -\frac{1}{100 * 10^{-6}} = -10000 rad/\sec$$

Il denominatore è di grado due, annullandolo si ottengono quindi due poli:

$$47*10^{-9}S^2+670*10^{-6}S+1=0$$

$$S_{P1,2}=\frac{-670*10^{-6}\pm\sqrt{\left(670*10^{-6}\right)^2-4*47*10^{-9}}}{2*47*10^{-9}}=\frac{-670*10^{-6}\pm 510*10^{-6}}{94*10^{-9}}$$

$$S_{P1}=\frac{-670*10^{-6}+510*10^{-6}}{94*10^{-9}}\cong -1700rad/\sec$$

$$S_{P2}=\frac{-670*10^{-6}-510*10^{-6}}{94*10^{-9}}\cong -12500rad/\sec$$

In definitiva, quindi, si può scrivere che

$$47*10^{-9}S^2+670*10^{-6}S+1=47*10^{-9}\left(S-S_{P1}\right)\left(S-S_{P2}\right)=47*10^{-9}\left(S+1700\right)\left(S+12500\right)$$

$$T(S)=\frac{V_{OUT}}{V_{IN}}=\frac{1+100*10^{-6}S}{47*10^{-9}S^2+670*10^{-6}S+1}=\frac{1+100*10^{-6}S}{47*10^{-9}\left(S+1700\right)\left(S+12500\right)}$$

Il metodo fin qui esposto è piuttosto macchinoso e necessita di un po' di attenzione (soprattutto nella scrittura della FDT per arrivare a forme facilmente scomponibili in fattori) ma è del tutto rigoroso. In pratica, per velocizzare lo studio e cercare di minimizzare gli errori, esistono dei metodi approssimati e un po' empirici che danno ottimi risultati ma richiedono parecchio "occhio" per essere usati senza errori, quindi non li tratterò.

I diagrammi di Bode

Poiché la variabile S è complessa, la funzione di trasferimento sarà composta da un rapporto di numeri complessi, quindi, per qualunque valore della frequenza f che possiamo studiare, $T(S)$ sarà in generale un numero complesso.

Il diagramma di Bode è un metodo grafico molto semplice che permette di disegnare l'andamento del modulo (espresso in dB) e della fase di un qualunque funzione di trasferimento in funzione della frequenza.

Come risulterà più chiaro dagli esempi, l'asse della frequenza è logaritmico, cioè rappresenta la frequenza per decadi (1rad/sec, 10rad/sec, 100rad/sec …) e non in modo lineare (1rad/sec, 2rad/sec, 3rad/sec …).

Per costruire i diagrammi di Bode è necessario scrivere la funzione di trasferimento nella forma

$$T(S)=K\frac{\left(1+{}^{S}\!/_{S_{Z1}}\right)\left(1+{}^{S}\!/_{S_{Z2}}\right)\ldots\left(1+{}^{S}\!/_{S_{ZM}}\right)}{\left(1+{}^{S}\!/_{S_{P1}}\right)\left(1+{}^{S}\!/_{S_{P2}}\right)\ldots\left(1+{}^{S}\!/_{S_{PN}}\right)}$$

E risulta evidente che se ci sono un polo ed uno zero di uguale valore, essi vengono eliminati dalla FDT proprio allo stesso modo di come si semplificano le frazioni. Fisicamente infatti l'effetto di un polo è opposto a quello di uno zero, pertanto anche in realtà si ha una compensazione reciproca degli effetti che sfocia nella cancellazione polo – zero.

<u>Diagramma di Bode di una costante</u>

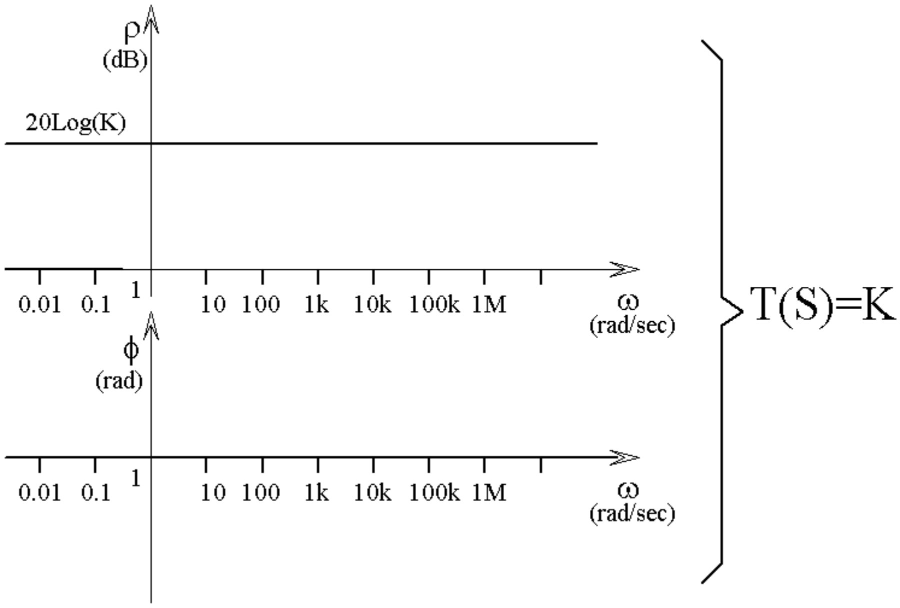


Figura A-2

Diagramma di Bode di uno Zero

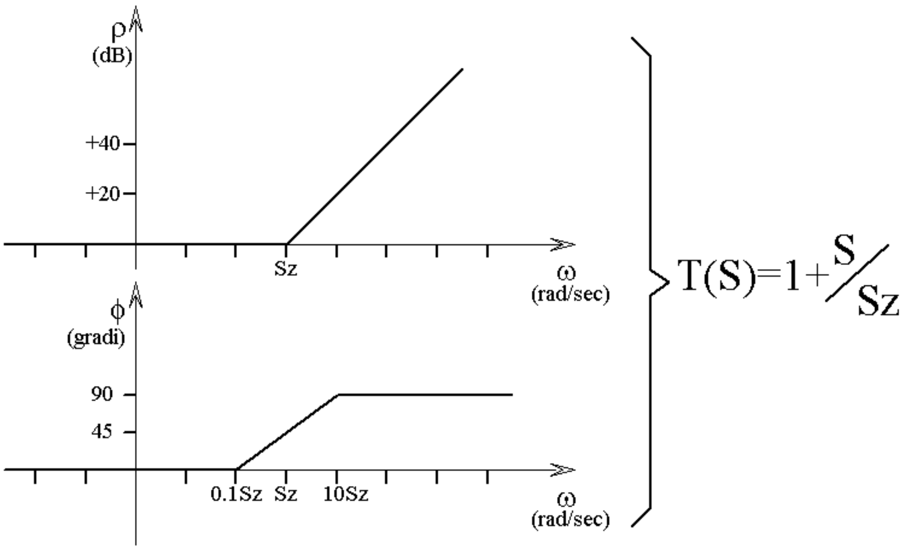
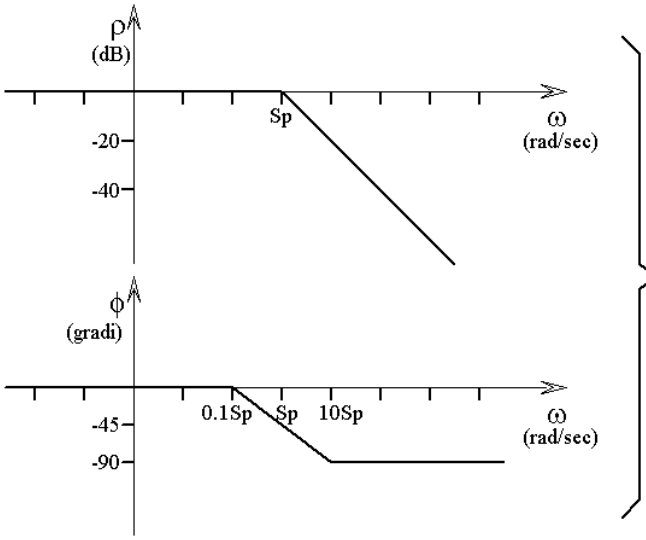


Figura A-3

Il diagramma del modulo è una spezzata, il tratto crescente ha pendenza di +20db/dec.

Diagramma di Bode di un Polo



$$T(S) = \frac{1}{1 + \frac{S}{Sp}}$$

Figura A-4

Il diagramma del modulo, nella parte decrescente, ha pendenza di –20db/dec.

I diagrammi appena visti funzionano per singolarità reali negative. Nel caso si presenti un polo positivo il sistema è instabile (di fatto è un oscillatore più o meno sinusoidale) e non si pone il problema di disegnare i diagrammi di Bode.
A volte, però, può darsi di trovare degli zeri reali positivi ([4]), il loro modulo segue lo stesso diagramma degli zeri reali negativi, mentre la fase è identica a quella dei poli negativi.

Diagramma di Bode di singolarità nulle

[4] In genere si trovano alle alte frequenze nei circuiti equivalenti dei BJT, FET, MOS e anche in alcune reti attive.

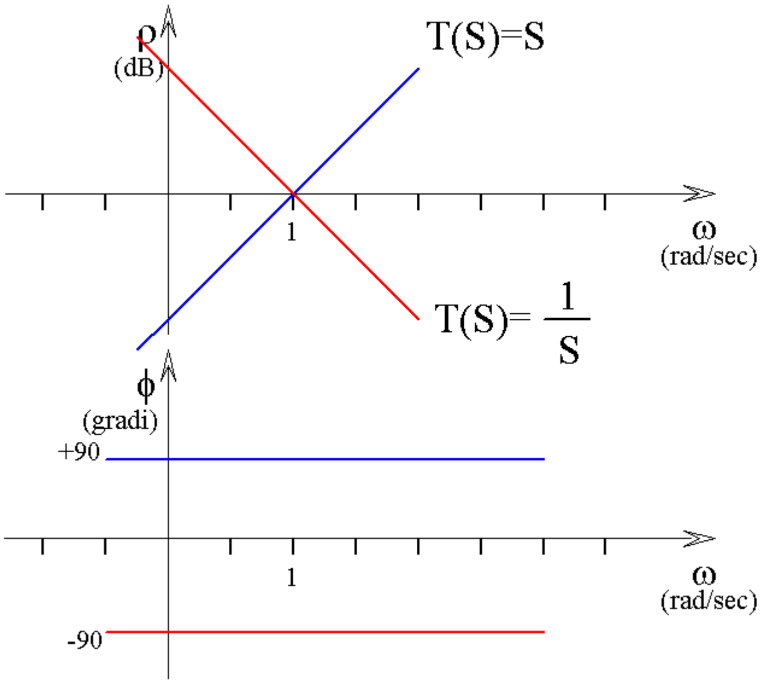


Figura A-5

Si osservi che singolarità nulle hanno, per diagramma del modulo, rette uniformemente crescenti (se zero) o decrescenti (se polo) con pendenza di ±20db/dec che incrociano l'asse delle frequenze per $\omega = 1$.

Una nota doverosa, nel caso che nella FDT compaia un "-" occorre diminuire il diagramma della fase di 180°.

Volutamente tralascio il caso di singolarità complesse poiché la trattazione (che richiede alcune formule trigonometriche) risulterebbe piuttosto pesante.

Allora, data la FDT nella forma di Bode, si inizia disegnando tutti i contributi relativi ad ogni singolarità, dopodiché si sommano semplicemente le curve punto per punto e si ottiene il diagramma complessivo.
E' evidente che i diagrammi che si ottengono sono composti da spezzate e questa è una approssimazione della realtà che funziona bene per frequenze molto più alte o molto più basse della frequenza di polo o zero. Cosa voglio dire? Presto detto: se il modulo tenderà veramente a scendere (o salire) con la pendenza indicata negli esempi, la fase in realtà tenderà ai +/-90° soltanto per frequenza molto elevate. Per esempio, un polo a 100rad/sec, introdurrà i seguenti contributi di fase:

Pulsazione (rad/sec)	Contributo di Fase
10	-5.7°
30	-16.7°
50	-26.6°
70	-35°
90	-41.9°
100	-45°
300	-71.5°
500	-78.7°
700	-81.8°

900	-83.7°
1000	-84.3°
10k	-89.4°
100k	-89.9°

Di fatto, dal punto di vista strettamente matematico, ciascuna singolarità non riuscirà mai a fornire un contributo di +/-90° esatti: bisogna quindi stare attenti qualora (come nel caso degli oscillatori) si necessiti di un certo sfasamento ben preciso. Per esempio, se dobbiamo introdurre una rotazione di -180°, due poli non saranno mai sufficienti, ne serviranno almeno tre.

Tenete presente che i diagrammi di Bode sono tranquillamente usati anche per lo studio dei sistemi reazionati, quindi l'approssimazione che forniscono risulta del tutto soddisfacente anche per studi avanzati.

Esempio A-3

Consideriamo ancora la $T(S)=\dfrac{1+100*10^{-6}S}{47*10^{-9}(S+1700)(S+12500)}$ e portiamola, con alcuni semplici passaggi, nella forma di Bode:

$$T(S)=\frac{1}{47*10^{-9}*1700*12500}\frac{1+\frac{S}{10000}}{\left(1+\frac{S}{1700}\right)\left(1+\frac{S}{12500}\right)}\cong\frac{1+\frac{S}{10000}}{\left(1+\frac{S}{1700}\right)\left(1+\frac{S}{12500}\right)}$$

A questo punto disegnamo, per ciascun polo e zero, la rispettiva componente del diagramma di bode (in figura, per comodità, ho evidenziato le varie componenti in colori diversi):

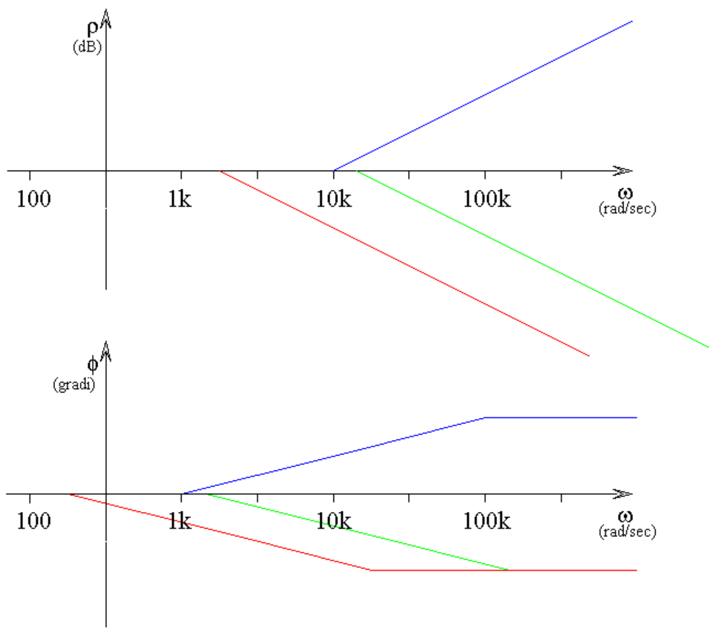


Figura A-6

Resta da comporre i vari contributi facendone semplicemente una somma punto per punto. Si arriva così al risultato finale:

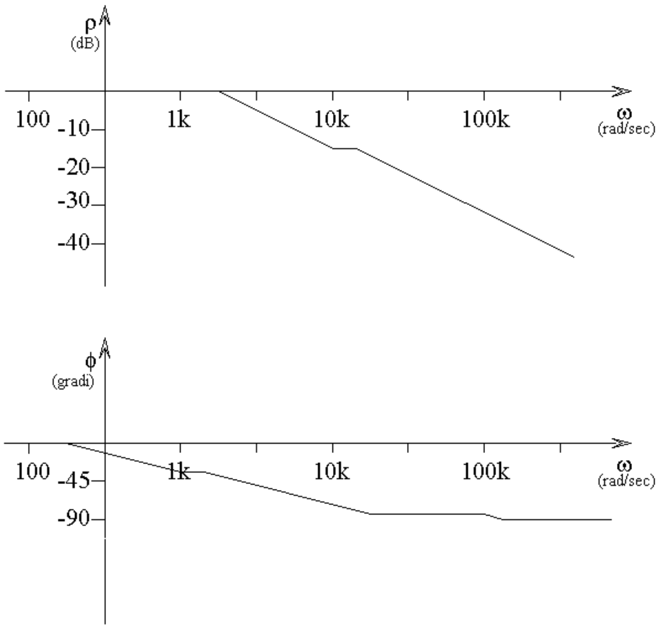


Figura A-7

Per concludere l’argomento vediamo un esempio completo

Esempio A-4

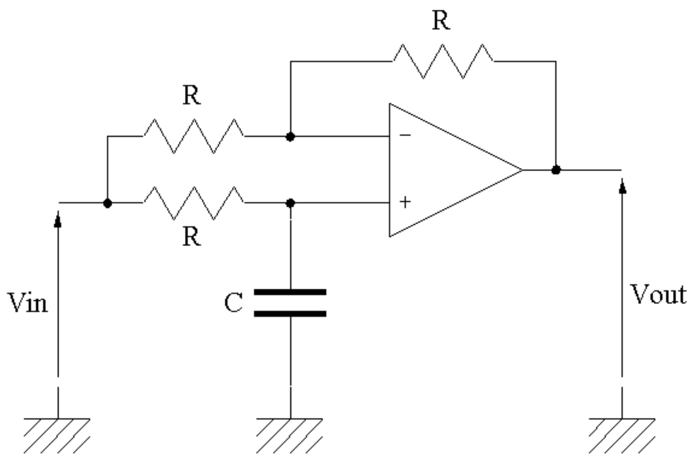


Figura A-8

Consideriamo che l’operazionale sia ideale, abbia quindi un guadagno infinito. In tal modo le tensioni sugli ingressi invertente e non invertente sono identiche, quindi si può scrivere

$$V^{+} = V_{IN}\frac{\frac{1}{SC}}{R+\frac{1}{SC}} = V_{IN}\frac{1}{SC}\frac{SC}{1+SCR} = V_{IN}\frac{1}{1+SCR}$$

$$V^{-} = \frac{V_{IN}}{2} + \frac{V_{OUT}}{2}$$

$$V^+ = V^-$$

$$\frac{V_{IN}}{2} + \frac{V_{OUT}}{2} = V_{IN} \frac{1}{1+SCR}$$

$$\frac{V_{OUT}}{2} = V_{IN} \frac{1}{1+SCR} - \frac{V_{IN}}{2} = V_{IN} \frac{2-1-SCR}{2(1+SCR)}$$

$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{1-SCR}{1+SCR}$$

Si vede che il sistemi ha uno zero positivo ed un polo negativo di uguale modulo. Di conseguenza il diagramma di Bode del modulo sarà perfettamente piatto mentre la fase sarà:

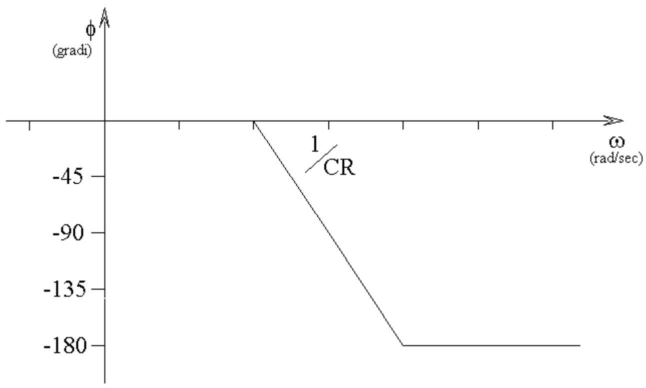


Figura A-9

Risposte in frequenza notevoli

Conviene definire alcune risposte in frequenza di grande importanza nelle applicazioni.

- *Risposta di tipo PASSA BASSO:* è caratterizzata da una funzione di trasferimento con uno o più poli e nessuno zero. Evidentemente il polo a frequenza minore determinerà la frequenza di taglio.
- *Risposta di tipo PASSA ALTO:* è caratterizzata da uno zero nullo e da un polo.
  La figura seguene mostra i digrammi di Bode di una tipica funzione passa alto: il contributo dello zero è in blu, quello del polo è in rosso, mentre la risposta complessiva è in nero.

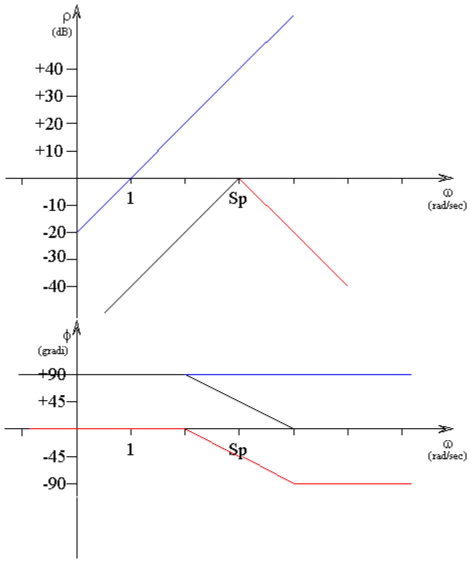


Figura A-10

si osserva che il polo determina la frequenza di taglio inferiore.

- *Risposta di tipo PASSA BANDA:* è caratterizzata da uno zero nullo e due poli coincidenti. La pulsazione dei poli coincide ovviamente con la frequenza centrale del "filtro". La figura seguente mostra i digrammi di Bode (i contributi dei poli sono in rosso, il contributo dello zero è in blu, mentre la curva nera è la risposta complessiva).

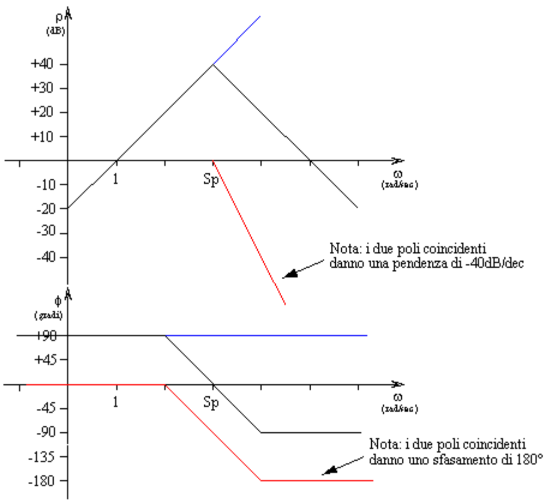


Figura A-11

E' ovvio che in pratica, poi, possono essere realizzate funzioni di trasferimento comunque complesse, pertanto le risposte in frequenza che si possono ottenere sono le più varie immaginabili. Ad ogni modo la definizione delle tre risposte notevoli risulta molto utile per fissare dei termini di paragone a cui riferirsi di volta in volta anche durante la trattazione.